ENGENHARIA CIVIL

CAPITULO 8 : COMPRESSÃO E FLEXO-COMPRESSÃO

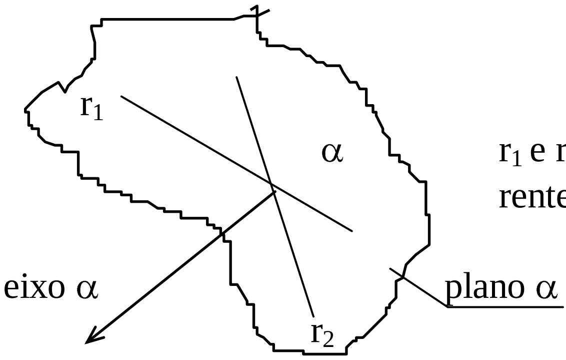
PARTE 1: SEÇÕES SIMPLES

NOV / 2012

Barras comprimidas

1. Planos de flambagem:

Todo plano de flambagem, receberá a mesma denominação do eixo principal de inércia, ao qual é perpendicular. Assim, o plano “α“ é perpendicular ao eixo “α“.



r_1 e r_2 são duas retas concorrentes do plano α

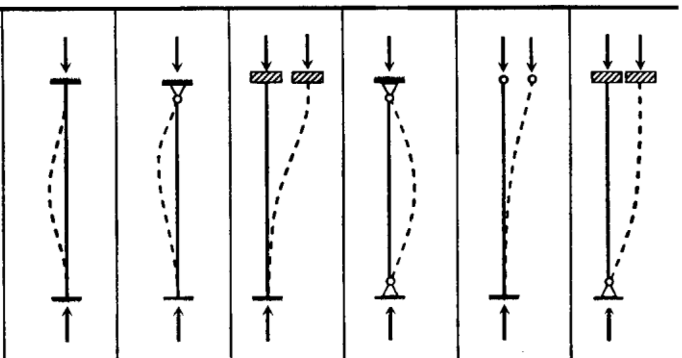
2. Comprimentos de flambagem:

$L_0 = K_E.L$ = comprimento teórico de referência (comprimento de flambagem), no plano considerado

K_E = parâmetro de flambagem, transforma o comprimento efetivo “L” de uma barra comprimida, em um comprimento equivalente “KL” correspondente a uma barra com extremidades rotuladas.

L = comprimento efetivo da barra no plano considerado, medido entre dois pontos contraventados ou entre dois nós.

Tabela 11– Valores dos coeficientes K_E

Modos de flambagem						
Valores de projeto para K_E	0,65	0,80	1,20	1,00	2,10	2,40

Código das condições de extremidade	
	Rotação e translação impedidas
	Rotação livre e translação impedida
	Rotação impedida e translação livre
	Rotação e translação livres

A NBR 7190 / 2010 admite apenas os seguintes valores para o ou comprimento teórico de referência:

L_0 = 2L para barra engastada-livre e **L_0 = L** para outros casos.

3. Comprimento de flambagem ou comprimento teórico de referência de barras de tesouras

3.1. Flambagem no plano da tesoura:

L = distância entre nós das tesouras

$L_0 = K_E\, L = 1L$ = comprimento de flambagem ou comprimento teórico de referência nos planos das tesouras

3.2. Flambagem no plano perpendicular à tesoura:

L = distância entre nós dos planos perpendiculares às tesouras (plano do telhado e outros), travados contra deslocamentos nesses planos por meio de contraventos do plano do telhado, mãos francesas e/ou tesouras de contraventamento longitudinal.

$L_0 = K_E\, L = 1L$ = comprimento de flambagem ou comprimento teórico de referência no plano perpendicular à tesoura.

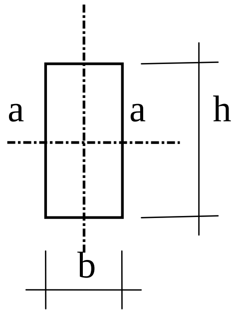
4- Características geométricas das seções:

- Formulário:

Características Geométricas - Seção Retangular:

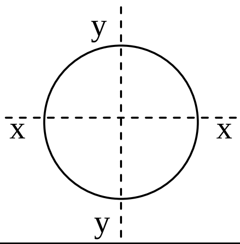
$$I_a = \frac{b\,h^3}{12} \quad ; \quad W_a = \frac{I_a}{h/2} \quad ;$$

$$A = b\,h \quad ; \quad i_a = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

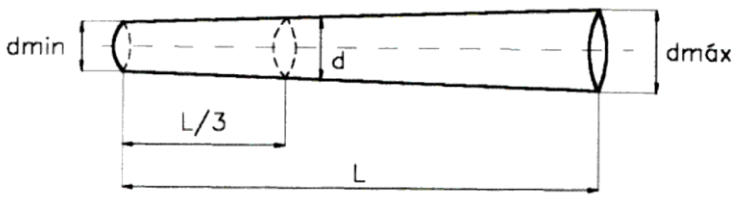


Características Geométricas - Seção Circular

$$I_x = I_y = I = \frac{\pi\,d^4}{64} \quad ; \quad A = \frac{\pi\,d^2}{4} \quad ; \quad i_x = i_y = 0{,}25\,d$$



Características geométricas - Circular de seção variável



$$d \le 1{,}5\,d_{\min}$$

$$d = \frac{d_{\max} + 2d_{\min}}{3} \le 1{,}5\,d_{\min}$$

Seções Compostas:

$$I_c = \sum I_i + \sum A_i \,.\, d_i^{\,2}$$

Esbeltez:

$$\lambda_x = \frac{l_x}{i_x} \quad ; \quad \lambda_y = \frac{l_y}{i_y} \quad ; \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{i_1}$$

5- Compressão simples paralela às fibras:

5.1- Classificação das peças comprimidas:

$\boxed{\lambda = \dfrac{L_0}{i} = \dfrac{K_E.L}{i}}$ = índice de esbeltez no plano de flambagem considerado.

L_0 = comprimento de flambagem;
L = comprimento da peça entre dois pontos contraventados;
K_E = parâmetro que leva em conta o tipo de vinculação das extremidades das barras.

Nota: embora a resistência dos materiais estabeleça valores teóricos e valores recomendados para o parâmetro K_E, a NBR 7190 / 2010 recomenda, independentemente do tipo de contenção nas extremidades das barras:

- **barras contidas nas duas extremidades: $K_E = 1$**
- **barras contidas em apenas uma extremidade, a outra livre: K = 2**

Índice de esbeltez	Classificação	Efeito
$\lambda \leq 40$	Peça curta	Rompe por esmagamento
$40 < \lambda \leq 80$	Medianamente esbelta	Flamba antes de atingir a tensão de esmagamento
$80 < \lambda \leq 140$	Esbelta	Flamba antes de atingir a tensão de esmagamento

5.2- Suficiência de peças curtas ($\lambda \leq 40$) sujeitas a compressão simples, em estados limites últimos:

5.2.1- Em peças sujeitas a compressão paralela às fibras:

$$\sigma_{nc,d} = \frac{N_d}{A_w} \leq \begin{cases} f_{c0,d} & \text{para } \alpha \leq 6^\circ \\ f_{c\alpha,d} & \text{para } \alpha > 6^\circ \end{cases}$$

Onde: $\sigma_{nc,d}$ = tensão atuante de cálculo;
N_d = solicitação de cálculo;
A_w = área bruta da peça, normal aos esforços;
α = ângulo formado entre a direção das fibras e a direção da força aplicada;
$f_{c\alpha,d}$ = tensão admissível a compressão na direção α, dado em 6.2.9 da NBr 7190/ 2010.

5.2.2- Em peças sujeitas a compressão normal às fibras:

$$\boxed{\sigma_{c90,d} \leq f_{c90,d}}$$

onde: $\boxed{f_{c90,d} = 0,25\, f_{c0,d}\ \alpha_n}$ e α_n é dado na tabela 9.

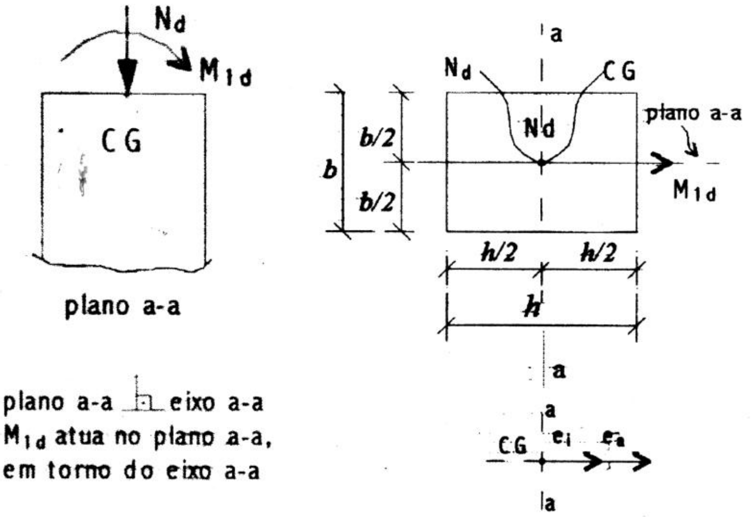
5.3- Suficiência a compressão, em estados limites últimos de peças medianamente esbeltas ($40 < \lambda \leq 80$) e esbeltas ($80 < \lambda \leq 140$) :

- As peças com índice de esbeltez $\lambda > 40$, sujeitas a compressão simples, devem ser dimensionadas admitindo-se uma excentricidade acidental acrescida de uma excentricidade de segunda ordem e, nas peças esbeltas, de uma excentricidade devido a fluência da madeira.

- A consideração da excentricidade acidental deve-se a imperfeições geométricas das peças e excentricidades inevitáveis dos carregamentos.

5.3.1-Suficiência a compressão de peças medianamente esbeltas ($40< \lambda \leq 80$):

Situação do projeto: flexo – compressão
Solicitações de cálculo: N_d e $M_{1d} = N_d \, e_d$



e_i = excentricidade inicial de primeira ordem

$$e_i = \frac{M_{1d}}{N_d} \geq \frac{h}{30}$$

Onde: M_{1d} = momento inicial do cálculo
h = dimensão da peça paralela ao plano de atuação do momento considerado.
No caso da compressão simples, $\mathbf{e_i = 0}$ $\therefore$ adota-se $\mathbf{e_i = \frac{h}{30}}$

e_a = excentricidade acidental mínima

$e_a = \frac{L_0}{300}$ onde L_0 = comprimento teórico de referência ou comprimento de flambagem;

$e_1 = e_i + e_a$

$E_{c0,ef} = K_{mod} \,.\, E_{c0m}$ = módulo de elasticidade efetivo a compressão paralela às fibras

I_a = momento de inércia da seção, relativo ao eixo principal de inércia a – a

F_E = carga crítica

$$F_E = \frac{\pi^2 \,.\, E_{c0,ef} \,.\, I_a}{L_0^2}$$

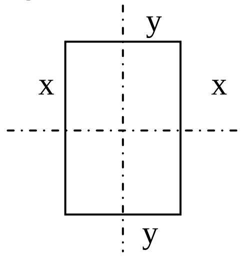
$$e_d = e_1 \left(\frac{F_E}{F_E - N_D} \right)$$

N_d = carga axial de compressão de cálculo
A_w = Área da seção transversal da peça
σ_{Nd} = Tensão atuante de compressão de cálculo = $\sigma_{Nc,d}$
$\sigma_{Nd} = \dfrac{N_d}{A_w}$
M_{da} = momento fletor de cálculo, no plano considerado a-a
W_a = módulo resistente da seção em relação ao eixo principal de inércia a-a, perpendicular ao plano a-a de atuação do momento.
$\sigma_{Md,a}$ = tensão atuante devida ao momento M_{da}
$\sigma_{Md,a} = \dfrac{M_{da}}{W_a}$

<u>Verificações a efeitos combinados, para α ≤ 6º</u>

a) Verificação a ser aplicada isoladamente para os planos de rigidez máxima e mínima (x-x e y-y)

$$\boxed{\frac{\sigma_{N,d}}{f_{c0,d}} + \frac{\sigma_{Mda}}{f_{c0,d}} \le 1}$$



b) K_M = coeficiente de correção K_M = 0,5 para seções retangulares
K_M = 1,0 para outras seções transversais.

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_{Nc,d}}{f_{c0,d}} \right)^2 + K_M \frac{\sigma_{Mx,d}}{f_{c0,d}} + \frac{\sigma_{My,d}}{f_{c0,d}} \le 1}$$

c)
$$\boxed{\left(\frac{\sigma_{Nc,d}}{f_{c0,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{Mx,d}}{f_{c0,d}} + K_M \frac{\sigma_{My,d}}{f_{c0,d}} \le 1}$$

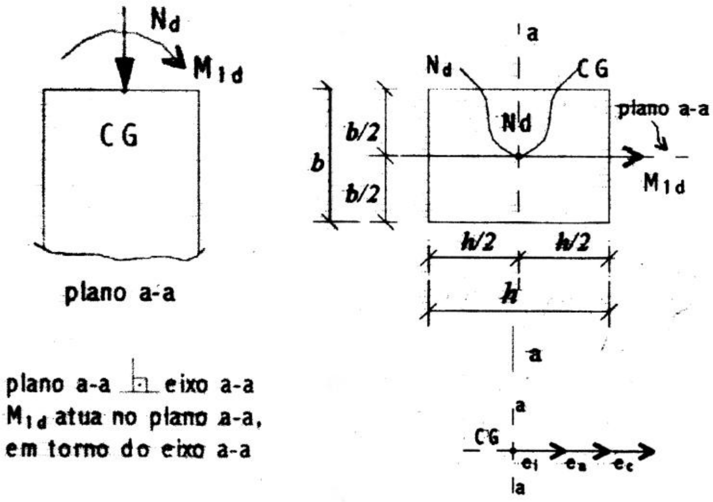
<u>Verificações a efeitos combinados, para α > 6º</u>

Neste caso, nas verificações a, b e c acima, substitui-se $f_{c0,d}$ por $f_{c\alpha,d}$.

Onde: $f_{c\alpha,d}$ = tensão admissível a compressão na direção α, dado em 6.2.9 da NBr 7190/ 2010.

5.3.2.- Suficiência de peças esbeltas ($80 < \lambda \leq 140$)

Situação do projeto: N_d e $M_{1d} = N_d \; e_d$



$e_a = \dfrac{L_0}{300} \geq \dfrac{h}{30}$ = excentricidade acidental mínima

$M_{1g,d}$ = Momento fletor de cálculo, devido a carga permanente

$M_{1q,d}$ = Momento fletor de cálculo, devido as cargas variáveis

N_d = Ação normal de cálculo

M_{1d} = Momento inicial de cálculo

N_d = Ação normal de cálculo

e_i = Excentricidade inicial de primeira ordem

$$e_i = \frac{M_{1d}}{N_d} = \frac{M_{1gd} + M_{1qd}}{N_d}$$

<u>Nota:</u> no caso de compressão simples, $M_{1d} = 0$ e portanto $e_i = 0$

e_{ig} = excentricidade inicial devido a carga permanente

$$e_{ig} = \frac{M_{1g,d}}{N_{gd}} \; ;$$

ψ_1 e ψ_2 = coeficiente de redução para ações variáveis (tabela-6 da NBR 7190/2010);

ϕ = coeficiente de fluência (tabela 15)

N_{GK} = ação permanente característica

N_{QK} = ação variável característica

$$F_E = \frac{\pi^2 \cdot E_{c0,ef} \cdot I_a}{L_0^2} = \text{carga crítica}$$

e_c = excentricidade de primeira ordem, devido a fluência da madeira.

$$e_c = (e_{ig} + e_a)\left\{ EXP \left[\frac{\phi\,[\,N_{GK} + (\psi_1 + \psi_2)\,N_{QK}\,]}{F_E - [N_{GK} + (\psi_1 + \psi_2)\,N_{QK}} \right] - 1 \right\}, \quad \text{com } (\psi_1 + \psi_2) \leq 1$$

$e_{1,ef}$ = excentricidade efetiva de primeira ordem

$$e_{1,ef} = e_1 + e_c = e_i + e_a + e_c$$

$$e_d = e_{1ef}\left(\frac{F_E}{F_E - N_D}\right)$$

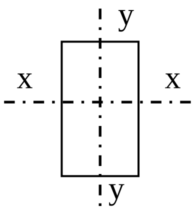
$$M_d = N_d \cdot e_d$$

$$\sigma_{Nd} = \frac{N_d}{A_w} \quad \text{e} \quad \sigma_{Md,a} = \frac{M_{da}}{W_a}$$

Verificação a efeitos combinados, para $\alpha \leq 6º$

Nota: esta verificação deve ser aplicada isoladamente para os planos de rigidez máxima e mínima (x-x e y-y).

$$\boxed{\frac{\sigma_{N,d}}{f_{c0,d}} + \frac{\sigma_{Mda}}{f_{c0,d}} \leq 1}$$



Verificação a efeitos combinados para $\alpha > 6º$

Neste caso, na fórmula acima, substitui-se $f_{c0,d}$ por $f_{c\alpha,d}$.

Tabela 15: Coeficiente de fluência ϕ

Classes de carregamento	Classes de umidade	
	(1) e (2)	(3) e (4)
Permanente ou de longa duração	0,8	2,0
Média duração	0,3	1,0
Curta duração	0,1	0,5

6. Exemplos de peças comprimidas:

Cimbramento com pontaletes de eucalipto, de seção variável.

Cimbramento com pontaletes de pinho 8 x 8 cm contraventados com tabuas.
Torre de elevador para acesso à casa no alto de uma pedra – Rio de Janeiro.

Barras tracionadas e comprimidas de sistemas treliçados.
Velho galpão em pórtico treliçado – bairro da Luz, São Paulo – Capital

Plataformas de trabalho contraventadas na própria torre da caixa d´água.
Torre de caixa d’água - Centro Social Esportivo, Guarulhos –São Paulo.

7. Exercícios resolvidos:

Assunto: Compressão simples em peça curta.

Ex.1:Verificar a suficiência a compressão simples paralela às fibras, nas condições padrão de umidade, da peça de seção circular abaixo esquematizada, considerando-a como peça curta, para a hipótese da ação simultânea a carga permanente e sobrecarga abaixo indicadas :

Dados:

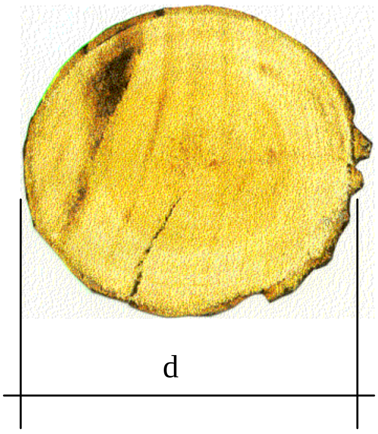
a) Madeira:
Canela vermelha não classificada;
Inclinação das fibras: $\alpha < 6^0$;

b) Seção empregada:
Considerar seção circular com diâmetro constante d = 13 cm;

c) Ambiente:
Umidade ambiente: U < 65 %;

c) Ações características de compressão de média duração, durante a construção:
Ng_K = 40 kN (devida a elementos construtivos em geral);
Nq_K = 82 kN (ações variáveis em geral);

d) Adotar: 10 MPa = 1 kN/cm^2



Solução:

Como peça curta, a condição de segurança a compressão simples é dada por: $\sigma_{c0,d} = \dfrac{N_d}{A_W} \leq f_{c0,d}$.

Área bruta: Para peça curta, calcula-se como seção circular $\therefore\ A_W = \dfrac{\pi\ d^2}{4} = \dfrac{\pi\ 13^2}{4} = 132{,}7\ cm^2$

Ação de cálculo mais desfavorável, durante a construção:

$\gamma_G = 1{,}4$ (tabela 1) ; $\gamma_Q = 1{,}3$ (tabela4) ; $\therefore$ $N_d = 1{,}4 \times 40 + 1{,}3 \times 82 = 162{,}6$ kN

Caracterização das propriedades da madeira:

Da ta bela do IPT: $f_{c0m,15\%} = 413\ kgf / cm^2 = 4{,}13\ kN / cm^2$

$$f_{c0m,12\%} = 4{,}13\left[1 + 3\left(\frac{15-12}{100}\right)\right] = 4{,}502\ \frac{kN}{cm^2}$$

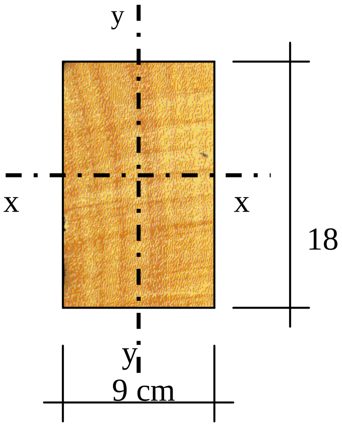
$f_{c0K,12\%} = 0{,}7\ f_{c0m,12\%} = 0{,}7 \times 4{,}502 = 3{,}151\ kN / cm^2$

$K_{mod\ 1} = 0{,}8$ (media duração) ; $K_{mod\ 2} = 1{,}0$ (classe 1) , $K_{mod\ 3} = 0{,}7$ (folhosa não classificada) ;

Assim, $K_{mod} = 0{,}8 \times 1 \times 0{,}7 = 0{,}56$; $\therefore$ $f_{c0d\,12\%} = K_{mod}\dfrac{f_{c0k}}{\gamma_c} = 0{,}56\ \dfrac{3{,}151}{1{,}4} = 1{,}26\ \dfrac{kN}{cm^2}$

Conclusão: como $\sigma_{c0,d} = \dfrac{162{,}6}{132{,}7} = 1{,}23\ \dfrac{kN}{cm^2} < f_{c0\,d} = 1{,}26\ \dfrac{kN}{cm^2}$ **,** aceita-se a peça**.**

Assunto: Compressão em peça de seção retangular medianamente esbelta.



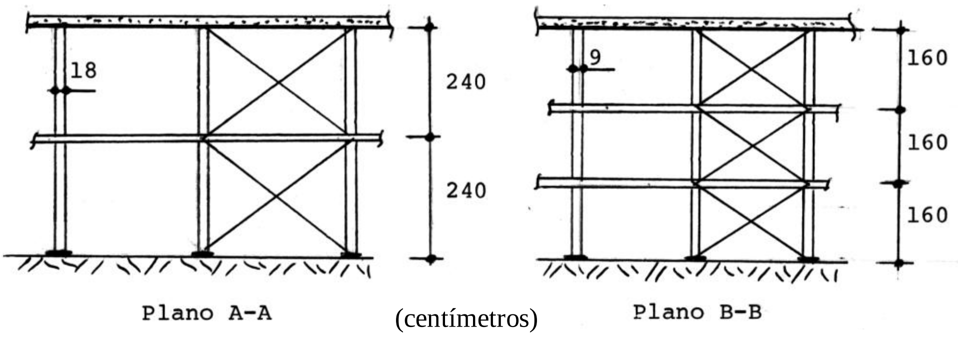
Ex.2: Verificar a suficiência a compressão simples, do cimbramento em seção retangular abaixo, nas condições padrão de umidade, considerando:

a) Madeira: Sucupira com:
$f_{c0,d\ 12\ \%} = 3{,}808$ kN / cm^2 e $E_{c0,ef\ 12\ \%} = 868{,}96$ kN / cm^2

b) $N_d = 150{,}0$ kN

c) Seção empregada e suas características geométicas:
$A_W = 162{,}0$ cm^2 $I_x = 4374{,}0$ cm^4 $I_y = 1093{,}5$cm^4
$W_x = 486{,}0$ cm^3 $W_y = 243{,}0$ cm^3
$i_x = 5{,}2$ cm $i_y = 2{,}6$ cm

d) Planos perpendiculares de contraventamentos:



Solução:

Planos de flambagem , comprimentos de flambagem e índices de esbeltez:

Plano A-A = plano x-x , $\therefore\ L_{0\,x} = K_E\, l_x = 1 \times 240 = 240$ cm $\Rightarrow \lambda_x = \dfrac{240}{5{,}2} = 46{,}2$

Plano B-B = plano y-y , $\therefore\ L_{0\,y} = K_E\, l_y = 1 \times 160 = 160$ cm $\Rightarrow \lambda_y = \dfrac{160}{2{,}6} = 61{,}5$

Adota-se $\lambda = \lambda_y = 61{,}5$ (o maior) $\Rightarrow 40 < \lambda < 80 \Rightarrow$ medianamente esbelta.

$e_i = 0 < \dfrac{h}{30} = \dfrac{9}{30} = 0{,}3\ cm$ (menor inércia) $\therefore$ adota-se $e_i = 0{,}3$ cm

$e_a = \dfrac{L_{o\,y}}{300} = \dfrac{160}{300} = 0{,}53\ cm$, $e = e_i + e_a = 0{,}3 + 0{,}53 = 0{,}83$ cm

$F_E = F_{Ey} = \dfrac{\pi^2 \,.\, 868{,}96 \,.\, 1093{,}5}{160^2} = 366{,}3\ kN$; $e_d = 0{,}83\left(\dfrac{366{,}3}{366{,}3 - 150}\right) = 1{,}41\ cm$

$M_d = M_{dy} = 150 \times 1{,}41 = 211{,}5$ kN . cm

$\sigma_{N\,d} = {}^{150}\!/_{162} = 0{,}926\ {}^{kN}\!/_{cm^2}$; $\sigma_{M\,dy} = {}^{211{,}5}\!/_{243} = 0{,}87\ {}^{kN}\!/_{cm^2}$; $K_M = 0{,}5$, $\sigma_{Mdx} = 0$

1ª verificação: $(0{,}926 + 0{,}87)\!/_{3{,}808} = 0{,}472 < 1 \quad \therefore$ OK

2ª verificação: $\left({}^{0{,}926}\!/_{3{,}808}\right)^2 + 0 + \left({}^{0{,}87}\!/_{3{,}808}\right) = 0{,}288 < 1 \ \therefore$ OK

3ª verificação: $\left({}^{0{,}926}\!/_{3{,}808}\right)^2 + 0 + 0{,}5\left({}^{0{,}87}\!/_{3{,}808}\right) = 0{,}173 < 1 \ \therefore$ OK , aceita-se o perfil.

Assunto: Compressão em peça de seção retangular esbelta

Ex.3: Verificar a suficiência a compressão simples, nas condições padrão de umidade, da peça de Pinho do Paraná de seção 8 x 8 cm , abaixo representada, considerando:

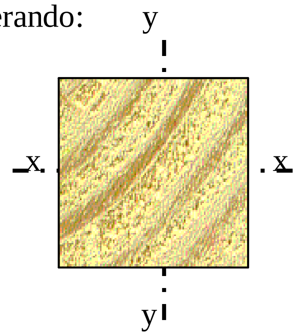
a) $f_{c0,d\ 12\%}$ = 1,636 kN/cm^2; $E_{c0\ ef,12\%}$=852,6 kN/cm$^{2;}$

b) Carregamento de média duração:

N_{gK} = 7,0 kN , N_{qK} = 8,0 kN

c) Adotar: $\gamma_g = \gamma_q = 1{,}4$; $\psi_1 = 0{,}3$; $\psi_2 = 0{,}2$

d) $L_{0x} = L_{0y}$ = 230 cm



Solução:

Combinações das ações de cálculo: N_d = 1,4 x 7 + 1,4 x 8 = 21 kN

Características geométricas da seção adotada:

$$I_x = I_y = I = \frac{8\ .\ 8^3}{12} = 341{,}3\ cm^4 \qquad W_x = W_y = W = \frac{I}{8/2} = \frac{341{,}3}{4} = 85{,}3\ \text{cm}^3$$

$$A_W = 8 \text{ x } 8 = 64\ \text{cm}^2 \qquad i_x = i_y = i = \sqrt{\frac{I}{A_W}} = \sqrt{\frac{341{,}3}{64}}\,2{,}31\ cm$$

$$\text{Esbeltez: } \lambda = \lambda_x = \lambda_y = \frac{230}{2{,}31} = 99{,}57 > 80 \ \therefore \text{ esbelta.}$$

$$e_i = 0 \quad ; \quad e_a = \frac{L_0}{300} = \frac{230}{300} = 0{,}77\ cm > \frac{h}{30} = 0{,}27\ cm \quad ;$$

$\phi = 0{,}3$; $\psi_1 = 0{,}3$, $\psi_2 = 0{,}2$ e com $\psi_1 + \psi_2 = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5 < 1 \ \therefore$ OK

$$F_E = \frac{\pi^2\ .\ 852{,}6\ .\ 341{,}3}{230^2} = 54{,}29\ kN$$

$$e_c = (0 + 0{,}77)\left\{10^{\frac{0{,}3\,[7{,}0 + (0{,}3+0{,}2)\,8]}{54{,}29 - [7 + (0{,}3+0{,}2)\,8]}} - 1\right\} = 0{,}15\ \text{cm} \qquad ;$$

$$e_{1ef} = 0 + 0{,}77 + 0{,}15 = 0{,}92\ cm\ ; \qquad e_d = e_{1ef}\left(\frac{F_E}{F_E - N_D}\right) = 0{,}92\left(\frac{54{,}29}{54{,}29 - 21}\right) = 1{,}50\ cm$$

$M_d = N_d\ .\ e_d$ = 21 x 1,5 = 31,51 kN.cm ;

$$\sigma_{M\,d} = \frac{31{,}51}{85{,}3} = 0{,}369\ \frac{kN}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_{N\,d} = \frac{21}{64} = 0{,}328\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$\text{Efeitos combinados: } \frac{0{,}328}{1{,}636} + \frac{0{,}369}{1{,}636} = 0{,}43 < 1, \text{ portanto aceita-se a peça.}$$

Assunto: Compressão em peça de seção retangular: peça curta, medianamente esbelta e esbelta.

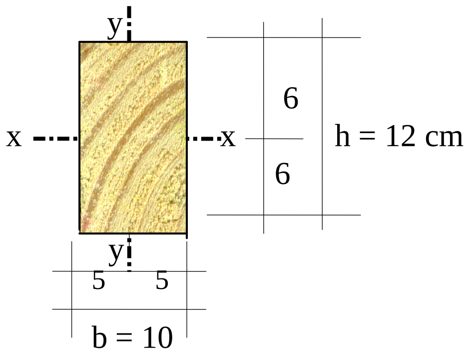
Ex.:4 - Verificar a suficiência a compressão paralela às fibras das peças comprimidas abaixo, nas condições padrão de umidade, considerando:

1) Peça curta.
2) L = 300 cm
3) L = 400 cm

Dados:

a) madeira: - Pinho do Paraná classe S1-D, classificação visual + ultra-som
- inclinação das fibras em relação ao sentido do esforço, $\alpha < 6^0$

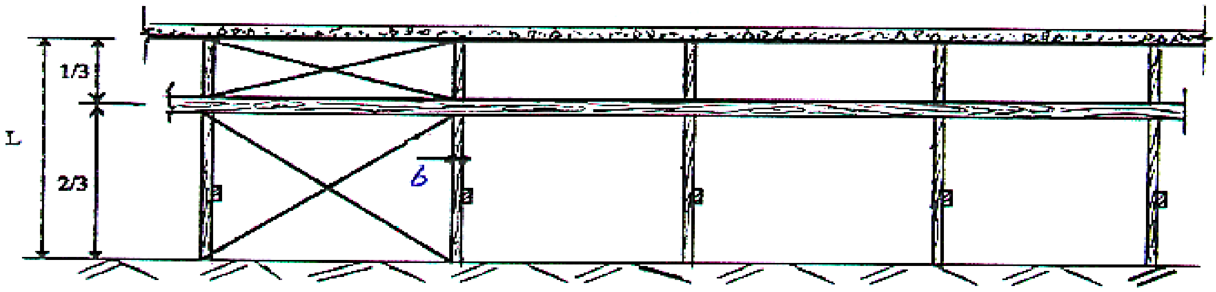
b) Seção empregada:

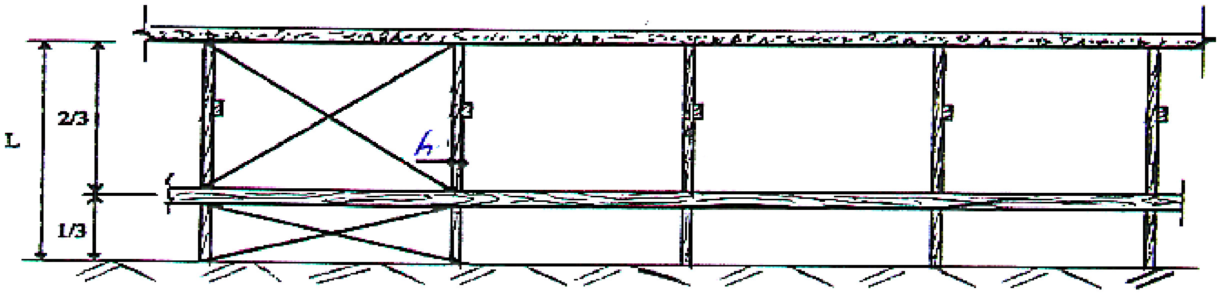


c) Carregamento de média duração, durante a construção:
Ng_K = 20 kN , devido a elementos construtivos com adição in loco;
Nq_K = 10,91 kN ; devido a ação variável truncada;
$\psi_1 = 0,3$ e $\psi_2 = 0,2$

d) Umidade relativa do ambiente: U < 65%

e) 10 MPa $\cong 1 \dfrac{kN}{cm^2}$





Solução:

Caracterização das propriedades da madeira:

Pinho do Paraná: da tabela E3 da NBR 7190 / 97,vem: $\begin{cases} f_{c0,m\ 12\%} = 40{,}90\ \text{MPa} \\ E_{c0,m\ 12\%} = 15225\ \text{MPa} \end{cases}$

$$f_{c0,k\ 12\%} = 0{,}7\ f_{c0,m\ 12\%} = 0{,}7 \times 40{,}9 = 28{,}63\ \text{MPa}$$

$$K_{mod1} = 0{,}8 \text{ (média duração)}$$

$$K_{mod2} = 1{,}0 \text{ (classe 1)}$$

$$K_{mod3} = 0{,}8 \text{ (classe S1-D, classificação visual + ultra-som)}$$

$$K_{mod} = K_{mod1} \cdot K_{mod2} \cdot K_{mod3} = 0{,}8 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$$

$$f_{co,d\ 12\%} = K_{mod} \cdot \frac{f_{c0,k\ 12\%}}{\gamma_c} = 0{,}64 \cdot \frac{28{,}63}{1{,}4}$$

$$\therefore\ f_{c0,d\ 12\%} = 13{,}09\ \text{MPa} = 1{,}309\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$E_{c0,ef\ 12\%} = K_{mod} \cdot E_{c0,m\ 12\%} = 0{,}64 \cdot 15225$$

$$E_{c0,ef\ 12\%} = 9.744\ \text{MPa} = 974{,}4\ \frac{kN}{cm^2}$$

Características geométricas do perfil em

$$Aw = A = 10 \times 12 = 120\ cm^2$$

$$Ix = \frac{10 \times 12^3}{} = 1440\ cm^4$$

$$Wx = \frac{Ix}{12/2} = \frac{Ix}{6} = 240\ cm$$

$$i_x = \sqrt{\frac{Ix}{A}} = \sqrt{\frac{1440}{120}} = 3{,}46\ cm$$

$$Iy = \frac{12 \times 10^3}{12} = 1000\ cm^4$$

$$Wy = \frac{Iy}{10/2} = \frac{Iy}{5} = 200\ cm^3$$

$$i_y = \sqrt{\frac{Iy}{A}} = \sqrt{\frac{1000}{120}} = 2{,}89\ cm$$

Combinações das ações de cálculo:

γ_g = 1,3 (devido a elementos construtivos com adição in loco;

γ_q= 1,2 (devido a ação variável truncada)

$Nd = \gamma_g \,.\, Ng_k + \gamma_q \,.\, Nq_k = 1{,}3 \,.\, 10{,}0 + 1{,}2 \,.\, 10{,}91 =$

$Nd = 38$ kN

Verificação da suficiência do perfil adotado:

4.1.Como peça curta (λ < 40)

Neste caso, não há flambagem.

Condição: $\sigma_{c,d} = \dfrac{Nd}{Aw} \leq f_{c0,d}$

$$\sigma_{e,d} = \frac{38}{120} = 0{,}317 \frac{kN}{cm^2} < f_{c0,d} = 1{,}309 \frac{kN}{cm^2} \quad \therefore \text{ aceita-se a peça}$$

4.2 Para L = 300 cm:

Esbeltez: $\ell x = \ell y = \dfrac{2}{3}\ 300 = 200$ cm (distâncias entre nós contraventados)

Comprimentos de flambagem:

$L_{0x} = K_E \,.\, \ell_x = 1 \,.\, 200 = 200$ cm

$L_{0y} = K_E \,.\, \ell_y = 1 \,.\, 200 = 200$ cm

$$\lambda_x = \frac{L_{0x}}{i_x} = \frac{200}{3{,}46} = 57{,}8 < 140$$

$$\lambda_y = \frac{L_{0y}}{i_y} = \frac{200}{2{,}89} = 69{,}2 < 140$$

$\therefore$ mais desfavorável = plano y – y

adota – se $\lambda = \lambda_y = 69{,}2$

como $40 < \lambda < 80$, verifica – se como peça **medianamente esbelta.**

Verificação da suficiência como peça medianamente esbelta:

Neste caso, a verificação deve ser feita a flexo–compressão, considerando-se as excentricidades "ei" e "ea" (excentricidade inicial, devida a situação de projeto e excentricidade acidental mínima respectivamente).

- para compressão centrada (simples), $ei = \frac{M_d}{N_d} = 0$;

- por norma, adota-se $ei \geq \frac{h}{30}$, onde h é a dimensão da peça medida no plano de flambagem considerado.

No caso:

Para flexão em torno do eixo y-y, no plano y-y , h = 10cm

$\therefore$ adota-se $ei = \frac{h}{30} = \frac{10}{30} = 0{,}33$ cm

$$ea = \frac{L_0}{300} = \frac{L_{0y}}{300} = 0{,}67 \text{ cm}$$

$$e_1 = ea + ei = 0{,}67 + 0{,}33 = 1{,}0 \text{ cm}$$

$$F_E = \frac{\pi^2 \cdot E_{c0,ef} \cdot I}{L^2_0} = \frac{\pi^2 \cdot E_{c0,ef} \cdot I_y}{L^2_{0y}} = \frac{\pi^2 \cdot 974{,}4 \cdot 1000}{200^2}$$

$$F_E = F_{Ey} = 240{,}4 \text{ kN}$$

$$ed = e_1 \left(\frac{F_E}{F_E - Nd}\right) = 1{,}0 \left(\frac{240{,}4}{240{,}4 - 38}\right) = 1{,}19 \text{ cm}$$

$$Md = Md_y = Nd \cdot ed = 38 \text{ x } 1{,}19 = 45{,}22 \text{ kN . cm}$$

$$\sigma_{Nc,d} = \frac{Nd}{A_w} = \frac{38}{120} = 0{,}317 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{M,d} = \sigma_{My,d} = \frac{M_{yd}}{W_y} = \frac{45{,}22}{200} = 0{,}226 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Verificação a flexo-compressão: ($\sigma_{mx,d}$ = zero)

1º Verificação:

$$\frac{\sigma_{N,d}}{f_{c0,d}} + \frac{\sigma_{M,d}}{f_{c0,d}} \leq 1{,}0$$

$$\frac{0{,}317}{1{,}309} + \frac{0{,}226}{1{,}309} = 0{,}415 < 1{,}0 \quad \therefore \quad \text{OK}$$

2º Verificação:

$$\left(\frac{\sigma_{Nc,d}}{f_{c0,d}}\right)^2 + K_M \frac{\sigma_{Mx,d}}{f_{c0,d}} + \left(\frac{\sigma_{My,d}}{f_{c0,d}}\right) \leq 1{,}0$$

onde K_m = 0,5 para seção retangular.

$$\left(\frac{0{,}317}{1{,}309}\right)^2 + 0{,}5\,.\,zero + \frac{0{,}226}{1{,}309} = 0{,}231 < 1{,}0 \quad \therefore \ \text{OK}$$

3º Verificação:

$$\left(\frac{\sigma_{Nc,d}}{f_{c0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{Mx,d}}{f_{c0,d}} + K_m\left(\frac{\sigma_{My,d}}{f_{c0,d}}\right) \leq 1{,}0$$

$$\left(\frac{0{,}317}{1{,}309}\right)^2 + zero + 0{,}5\left(\frac{0{,}226}{1{,}309}\right) + 0{,}145 < 1{,}0 \quad \therefore \ \text{OK}$$

Conclusão: Aceita-se a peça como medianamente esbelta.

4.3 Para L = 400 cm:

Esbeltez: $\ell x = \ell y = \frac{400}{3} \cdot 2 = 266{,}7$ cm

Comprimentos teóricos de flambagem:

$L_{0x} = K \cdot \ell x = 1 \cdot 266{,}7 = 266{,}7$ cm

$L_{0y} = K \cdot \ell y = 1 \cdot 266{,}7 = 266{,}7$ cm

$\lambda_x = \frac{L_{0x}}{i_x} = \frac{266{,}7}{3{,}46} = 77 < 140$

$\lambda_y = \frac{L_{0y}}{i_y} = \frac{266{,}7}{2{,}89} = 92{,}3 < 140$

$\therefore$ mais desfavorável = plano y – y

adota – se $\lambda = \lambda_y = 92{,}3$

como $80 < \lambda < 140$, verifica-se como **peça esbelta**.

Verificação da suficiência como peça esbelta:

Como peça esbelta, procede-se a verificação da suficiência a flexo–compressão, considerando–se além das excentricidades inicial (ei) e acidental (e_a), a excentricidade suplementar de primeira ordem (e_c), que leva em conta a fluência da madeira.

Assim, para flambagem no plano y-y, em torno do eixo y-y, vê

$$ei_g = \frac{M_{ig,d}}{Nd} = \frac{0}{Nd} = 0$$

$$ei = \frac{M_{1,d}}{Nd} = \frac{M_{1g,d} + M_{1q,d}}{Nd} = \frac{0 + 0}{Nd} = 0$$

$$ea = \frac{L_0}{300} = \frac{L_{0y}}{300} = \frac{266{,}7}{300} = 0{,}89 \text{ cm} > \frac{h}{30} = \frac{10}{30} = 0{,}33 \text{ cm}$$

adota-se $e_a = 0{,}89$ cm

da tabela 15: $\phi = 0{,}3$ (carga de média duração,classe de umidade 1)

$\psi_1 = 0{,}3$ e $\psi_2 = 0{,}2$ (dados do problema)

$\psi_1 + \psi_2 = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5 < 1$

$$F_E = \frac{\pi^2 \,.\, E_{c0,ef} \,.\, I}{L_0^2} = F_{ey} = \frac{\pi^2 \,.\, E_{c0,ef} \,.\, Iy}{L_{0y}^2}$$

$$F_{ey} = \frac{\pi^2 \text{ x } 974{,}4 \text{ x } 1000}{266{,}7^2} = 135{,}2 \text{ kN}$$

$$ec = (ei_g + ea)\left\{\exp\left[\frac{\phi\left[Ng_k + (\psi_1 + \psi_2)Nq_k\right]}{F_E - \left[Ng_k + (\psi_1 + \psi_2)Nq_k\right]}\right] - 1\right\}$$

Com $\psi_1 + \psi_2 \leq 1$

$$ec = (0 + 0{,}89)\left\{10^{\left[\frac{0{,}3\left[0+(0{,}3+0{,}2)10\right]}{135{,}2-\left[0+(0{,}3+0{,}2)10\right]}\right]} - 1\right\} = 0{,}15 \text{ cm}$$

$e_{1,ef} = e_1 + ec = ei + ea + ec = 0 + 0{,}89 + 0{,}15$

$e_{1,ef} = 1{,}04$ cm

$$Md = Md_y = Nd \,.\, e_{1,ef} \left(\frac{F_{E_y}}{F_{E_y} - Nd}\right)$$

$$Md_y = 38 \text{ x } 1{,}04 \text{ x } \left(\frac{135{,}2}{135{,}2 - 38}\right) = 54{,}97 \text{ kN.cm}$$

$$\sigma_{Nd} = \frac{N_d}{A_W} = \frac{38}{120} = 0{,}317 \; \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_{Md} = \sigma_{Mdy} = \frac{Md_y}{w_2} = \frac{Md_y}{w_y} = \frac{54{,}97}{200}$$

$$\sigma_{Md} = 0{,}275 \; \frac{kN}{cm^2}$$

<u>Condição:</u>

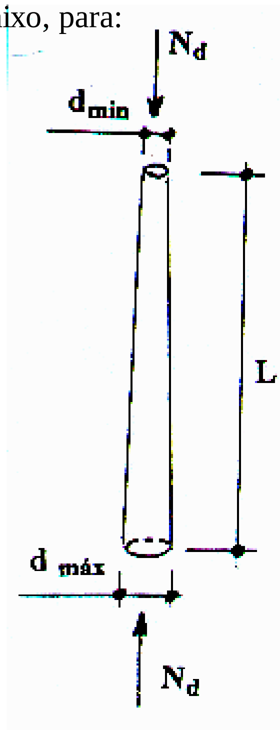
$$\frac{\sigma_{Nd}}{f_{c0,d}} + \frac{\sigma_{Mdy}}{f_{c0,d}} = \frac{0{,}317}{1{,}309} + \frac{0{,}275}{1{,}309} = 0{,}452 < 1$$

Conclusão: **Aceita-se a peça como esbelta.**

Assunto: Compressão simples em peça de seção circular com diâmetro variável.

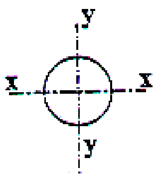
Ex 5: Verificar a suficiência a compressão simples da peça de seção variável abaixo, para:

1) L = 170 cm
2) L = 270 cm
3) L = 450 cm



Dados:

a) Contraventos em planos perpendiculares, apenas nas extremidades;
b) Madeira: Ipê com $\alpha \leq 6°$;
c) $K_{mod1} = 0,7$; $K_{mod2} = 1,0$; $K_{mod3} = 0,8$
d) Condição padrão de umidade;
e) Umidade Ambiente U < 65%;
f) Esforços característicos
   $N_{gK} = 8,0$ kN
   $N_{qK} = 20,0$ kN;
g) $\gamma_g = 1,3$ (devido a elementos construtivos com adição in loco;
   $\gamma_q = 1,2$ (devido a ação variável truncada)
h) $d_{min} = 12$ cm ; $d_{máx} = 35$ cm.
i) Adotar: $\phi = 0,8$, $\psi_1 = 0,7$ e $\psi_2 = 0,6$.

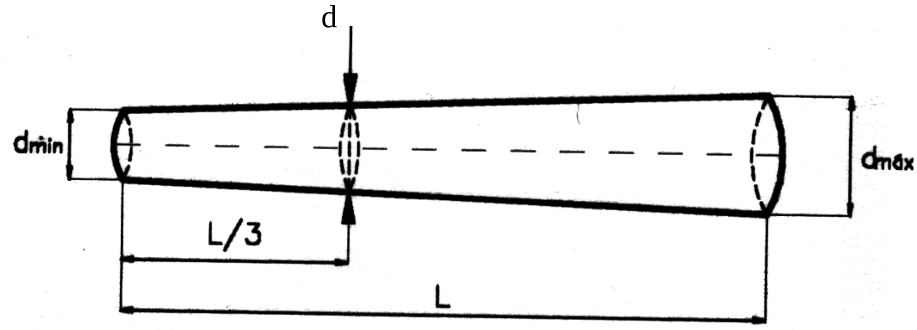


Solução:

O problema deve ser resolvido como peça de seção circular de diâmetro constante, tomando-se para tal o diâmetro "d" medido a partir da extremidade de menor diâmetro, a 1/3 L, respeitada a condição:

$$d \leq 1,5\, d_{min}$$

Por interpolação vem:



$$\frac{d_{max} - d_{min}}{d - d_{min}} = \frac{L}{L/3}$$

$$d = \frac{d_{max} + 2\, d_{min}}{3}$$

$\therefore$ $d = \dfrac{35 + 2 \times 12}{3} = 19,67$ cm $>$ $1,5\, d_{min} = 1,5 \times 12 = 18$ cm

$\therefore$ adota-se d = 18 cm

O problema será resolvido como de seção circular constante com d = 18 cm.

(vide o exercício seguinte)

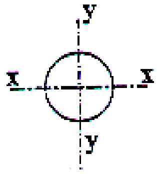
Assunto: Compressão simples em peça de seção circular curta, medianamente esbelta e esbelta, com diâmetro constante.

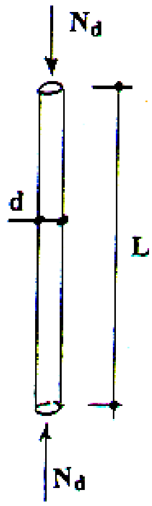
Ex 6: Verificar a suficiência a compressão simples da peça de seção constante abaixo, para:

1) L = 170 cm
2) L = 270 cm
3) L = 450 cm

Dados:

a) Contraventos em planos perpendiculares, apenas nas extremidades;
b) Madeira: Ipê com $\alpha \leq 6°$;
c) $K_{mod1} = 0{,}7$; $K_{mod2} = 1{,}0$; $K_{mod3} = 0{,}8$
d) Condição padrão de umidade;
e) Umidade Ambiente U < 65%;
f) Esforços característicos
   $N_{gK} = 8{,}0$ kN
   $N_{qK} = 20{,}0$ kN;
g) $\gamma_g = 1{,}3$ (devido a elementos construtivos com adição in loco;
   $\gamma_q = 1{,}2$ (devido a ação variável truncada)
h) Diâmetro da seção: d = 18 cm, constante ao longo da peça;
i) Adotar: $\phi = 0{,}8$, $\psi_1 = 0{,}7$ e $\psi_2 = 0{,}6$.





Solução:

Combinações das ações de cálculo:
Nd = 1,3 x 8,0 + 1,4 x 20,0 = 38,4 kN

Resistência e rigidez da madeira nas condições padrão de umidade (U = 12%) da tabela E2, vem: $f_{co,m} = 76{,}0$ MPa ; $E_{co,m} = 18011$ MPa

$K_{mod1} = 0{,}7$; $K_{mod2} = 1{,}0$; $K_{mod3} = 0{,}8$; $\gamma_c = 1{,}4$

$K_{mod} = 0{,}7 \times 1 \times 0{,}8 = 0{,}56$; $f_{co,k} = 0{,}7 \cdot f_{co,m} = 0{,}7 \times 76{,}0 = 53{,}2$ MPa

$f_{co,d} = K_{mod} \cdot \dfrac{f_{co,k}}{\gamma_c} = 21{,}28$ Mpa = 2,128 kN/cm²

$E_{co,ef} = K_{mod} \cdot E_{co,m} = 0{,}56 \times 18011$, $E_{co,ef} = 10086$ Mpa = 1008,6 kN/cm²

Características geométricas da seção circular, como circular, para verficação como peça curta :

$Aw = \dfrac{\pi \times 18^2}{4} = 254{,}47$ cm² ; $i = ix = iy = 0{,}25d = 4{,}5$ cm

6.1) <u>Para L = 170cm</u>

$L_{ox} = L_{oy} = KL_x = KL_y = 1 \times 170 = 170$ cm

$\lambda = \lambda x = \lambda y = \dfrac{170}{4{,}5} = 37{,}78 < 40$ $\therefore$ peça curta (não há flambagem)

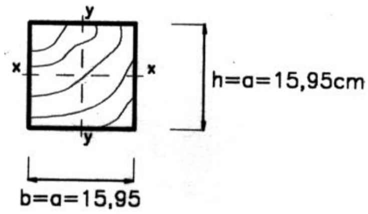
condição de segurança: $\sigma_{c0,d} = \dfrac{N_d}{Aw} = \dfrac{38{,}4}{254{,}47} = 0{,}151 \dfrac{kN}{cm^2} < f_{c0,d} = 2{,}128 \dfrac{kN}{cm^2}$

$\therefore$ aceita-se a peça como peça curta.

6.2) **<u>Para L = 270 cm</u>**

$\lambda = \lambda x = \lambda y = \dfrac{K.L}{i} = \dfrac{1 \times 270}{4,5} = 60 \quad \therefore\ 40 < \lambda < 80$, peça **medianamente esbelta.**

A verificação da suficiência deve ser feita a flexo-compressão, com peça de seção quadrada equivalente:



$A_w = 254,47\ cm^2 = a^2$

$\therefore\ a = 15,95\ cm$

- Características geométricas da seção quadrada equivalente:

$I = I_x = I_y = \dfrac{15,95 \times 15,95^3}{12} = 5393,4\ cm^4 \quad ; \quad W = W_x = W_y = \dfrac{I}{a/2} = 676,3\ cm^3$

- adotando-se flexão no plano x-x, em torno do eixo x-x, vem:
- solicitações de cálculo: $N_d = 38,4\ kN \quad ; \quad M_{1,dx} = 0$

$e_{ix} = \dfrac{M_{1dx}}{N_d} = 0 < \dfrac{h}{30} = 0,53\ cm$; adota-se $e_{ix} = 0,53cm$

$e_{ax} = \dfrac{L_{0x}}{300} = \dfrac{270}{300} = 0,9\ cm$; $e_{1x} = e_{ax} + e_{ix} = 1,43\ cm$

$F_{Ex} = \dfrac{\pi^2\ .\ 1008,6\ .\ 5393,4}{270^2} = 736,5\ kN$

$e_{dx} = 1,43\left(\dfrac{736,5}{736,5 - 38,4}\right) = 1,51\ cm$; $M_{dx} = 1,51 \times 38,4 = 57,98\ KN.cm$

$\sigma_{NC,d} = \dfrac{38,4}{254,47} = 0,151\ \dfrac{kN}{cm^2}$; $\sigma_{Mx,d} = \dfrac{57,98}{676,3} = 0,086\ \dfrac{kN}{cm^2}$

Verificação a efeitos combinados (flexo-compressão)

1) $\dfrac{\sigma_{Nc,d}}{f_{co,d}} + \dfrac{\sigma_{Mx,d}}{f_{co,d}} = \dfrac{0,151}{2,128} + \dfrac{0,086}{2,128} = 0,111 < 1,0\ \therefore$ <u>OK</u>

2) $\left[\dfrac{\sigma_{Nc,d}}{f_{co,d}}\right]^2 + \dfrac{\sigma_{Mx,d}}{f_{co,d}} + K_M\ .\ \cancel{\dfrac{\sigma_{My,d}}{f_{co,d}}}^{\,0} \leq 1$ com $K_m = 1,0$ p/ seção circular

3) $\left[\dfrac{\sigma_{Nc,d}}{f_{co,d}}\right]^2 + K_M\ \dfrac{\sigma_{Mx,d}}{f_{co,d}} + \cancel{\dfrac{\sigma_{My,d}}{f_{co,d}}}^{\,0} \leq 1$

Como 2) = 3), vem: $\left(\dfrac{0,151}{2,128}\right)^2 + 1\ .\left(\dfrac{0,086}{2,128}\right) = 0,045 < 1$

$\therefore$ **aceita-se a peça como medianamente esbelta**

6.3) Para L = 450 cm

$\lambda = \frac{450}{4,5} = 100 \quad \therefore \quad 80 < \lambda < 140 \Rightarrow$ **esbelta**

ei = 0

$e_a = \frac{L_o}{300} = \frac{450}{300} = 1,5 \text{ cm} > \frac{h}{30} = \frac{16}{30} = 0,53 \text{ cm}$

adota-se $e_a = 1,5\text{cm}$

$\phi = 0,8$; $\psi_1 = 0,7$ e $\psi_2 = 0,6$

$\psi_1 + \psi_2 = 0,7 + 0,6 = 1,3 > 1,0$

adota-se $\psi_1 + \psi_2 = 1$

$$F_E = \frac{\pi^2 \,.\, 1008,6 \,.\, 5393,4}{450^2} = 265,13 \, kN$$

$$e_c = (0 + 1,5)\left\langle 10^{\frac{0,8\,[8 + 1\,x\,20]}{265,13 - [8 + 1\,x\,20]}} - 1 \right\rangle = 0,25 \, cm$$

$e_{1ef} = e_i + e_a + e_c = 0 + 1,5 + 0,25$

$\therefore$ $e_{1ef} = 1,75$ cm

$$M_d = 3,84 \,.\, 1,75 \left[\frac{265,13}{265,13 - 38,4}\right] = 78,581 \, kN.m$$

$$\sigma_{Nd} = \frac{38,4}{15,95 \, x \, 15,95} = 0,15 \, \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_{Md} = \frac{78,581}{676,3} = 0,116 \, \frac{kN}{cm^2}$$

Efeitos combinados:

$$\frac{0.15}{2,128} + \frac{0,116}{2,128} = 0,125 < 1,0$$

$\therefore$ **aceita-se a peça como esbelta**

8. Exercícios propostos para as aulas:

Ex 1. Verificar a suficiência da peça abaixo, sujeita a compressão paralela às fibras, nas condições padrão de umidade.

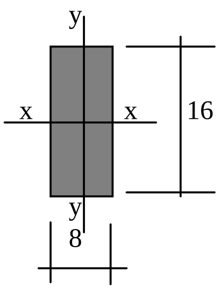
Dados:

a) Eucalipto Alba;
Da tabela E1 da NBR 7190/97, vem : $f_{c0m,12\%}$ = 47,3 MPa ; $E_{c0m,12\%}$ = 13409,0 MPa ;
b) K_{mod} = 0,56;
c) N_d = 90 kN;
d) Seção circular com diâmetro variável: D_{max} = 24 cm e D_{min} = 15 cm;
e) Adotar $L_{0x} = L_{0y}$ = 120,0 cm

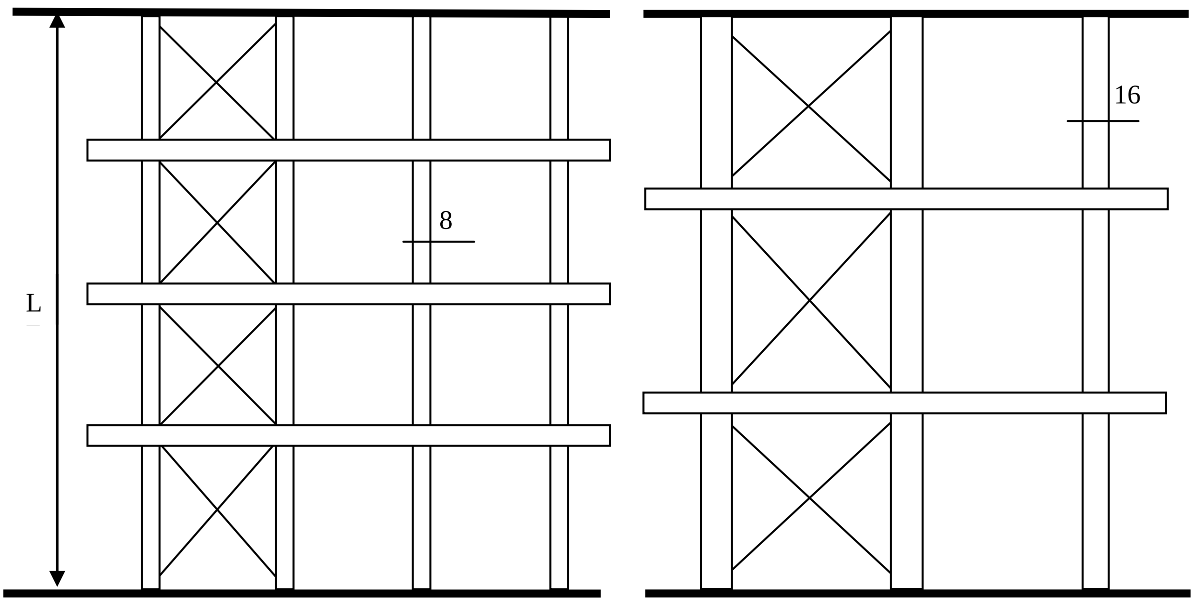
Ex 2. Resolver o exercício anterior considerando $L_{0x} = L_{0y}$ = 230,0 cm.

Ex 3. Verificar a suficiência a compressão paralela às fibras, da peça retangular abaixo, nas condições padrão de umidade.

Dados:



a) Sucupira Parda com: $f_{c0d,12\%}$ = 26,6 MPa ; $E_{c0ef,12\%}$ = 12163,4 MPa ;
b) N_d = 120 kN;
c) Seção retangular (b x d) = (8,0 cm x 16 cm);
d) Adotar L= 396,0 cm (comprimento total da barra)
e) Planos perpendiculares de contraventamentos:



9. Exercícios propostos:

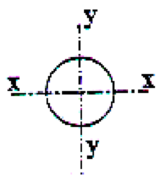
Assunto: Compressão simples em peça de seção circular com diâmetro variável.

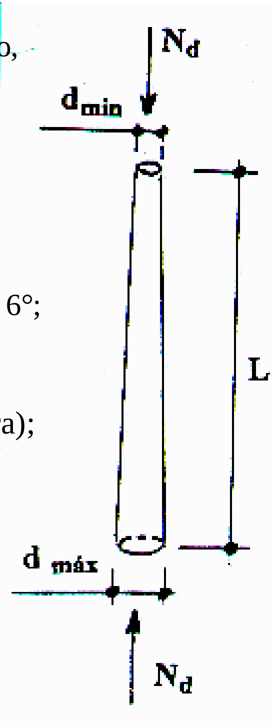
Ex1: Verificar a suficiência a compressão simples da peça de seção variável abaixo, para:

1) L = 173 cm
2) L = 288 cm
3) L = cm

Dados:

a) Contraventos em planos perpendiculares, apenas nas extremidades;
b) Madeira: Eucalipto Saligna classe S2, controle visual + flexão estática, com $\alpha \leq 6°$;
c) Condição padrão de umidade;
d) Esforços característicos, situação normal, longa duração:
   N_{gK} = 25,0 kN (devido a elementos construtivos industrializados de madeira);
   N_{qK} = 60,0 kN (devido a ação variável em geral, devido a equipamento);
h) d_{min} = 14 cm ; $d_{máx}$ = 32 cm.
i) Adotar: ϕ = vide tabela 15, ψ_1 e ψ_2 : vide tabela 6.





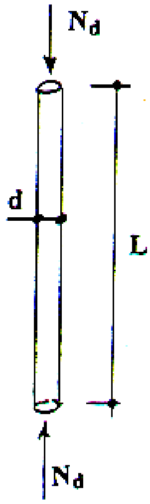
Assunto: Compressão simples em peça de seção circular com diâmetro constante.

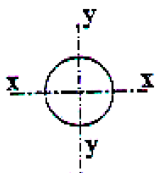
Ex2: Verificar a suficiência a compressão simples da peça de seção constante abaixo, para:

1) L = 173 cm
2) L = 288 cm
3) L = cm

Dados:

a) Contraventos em planos perpendiculares, apenas nas extremidades;
b) Madeira: Eucalipto Saligna classe S2, controle visual + flexão estática, com $\alpha \leq 6°$;
c) Condição padrão de umidade;
d) Esforços característicos, situação normal, longa duração:
   N_{gK} = 25,0 kN (devido a elementos construtivos industrializados de madeira);
   N_{qK} = 60,0 kN (devido a ação variável em geral, devido a equipamento);
e) d = 20 cm
f) Adotar: ϕ = vide tabela 15, ψ_1 e ψ_2 : vide tabela 6.





Assunto: Compressão simples em peça de seção circular com diâmetro constante.

Ex3: Verificar a suficiência a compressão simples, do cimbramento em seção retangular abaixo, nas condições padrão de umidade, para:

1) L = 330 cm
2) L = 580 cm
3) L = cm

Dados:

a) Madeira: Peroba Rosa classe S3, classificação visual + vibração transversal;
b) Inclinação das fibras em relação ao sentido do esforço, $\alpha < 6^0$
c) Seção empregada: (b x d) = (10 cm x 20 cm);
d) Carregamento de curta duração, durante a construção
   Ng_K = 30 kN , devido a elementos construtivos em geral;
   Nq_K = 70 kN ; devido a ação variável em geral (sem predominância de equipamentos fixos e nem de elevadas concentrações de pessoas por longos períodos de tempo) ;
e) Adotar: ϕ = de acordo com tabela 15, ψ_1 e ψ_2 : de acordo com tabela 6;
f) Umidade relativa do ambiente: U < 65% ;
g) L = comprimento total da barra;
h) Planos perpendiculares de contraventamentos;
i) 10 MPa $\cong 1 \dfrac{kN}{cm^2}$